İST.257 İLERİ MATEMATİK ARA SINAVI
CEVAP ANAHTARI

1) $z=\ln(x^2+y^2)$, $x=e^u \sin v$, $y=e^u \cos v$ olduğuna göre $\frac{\partial z}{\partial u}$ ve $\frac{\partial z}{\partial v}$ türevlerini hesaplayınız.

Cvp: $$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$=\frac{2x}{x^2+y^2}e^u\cos v+\frac{2y}{x^2+y^2}e^u\sin v$$

$$=\frac{2e^u\cos v}{e^{2u}}\cdot e^u\cos v+\frac{2e^u\sin v}{e^{2u}}e^u\cdot\sin v$$

$$=2\cos^2 v+2\sin^2 v=2$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}$$

$$=\frac{2x}{x^2+y^2}(-e^u\sin v)+\frac{2y}{x^2+y^2}e^u\cos v$$

$$=-\frac{2e^{2u}\cos v\sin v}{e^{2u}}+\frac{2e^{2u}\sin v\cos v}{e^{2u}}=0$$

2) Aşağıdaki fonksiyonların (0,0) noktasında limitlerinin var olup olmadığını gösteriniz.

a) $f(x,y)=\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$ b) $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

Cvp: a) $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}\right)=1\\ \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}\right)=-1\end{array}\right\}\neq \text{ limit yok.}$$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$ olduğunu gösterelim.

$\forall \varepsilon > 0$, $|x| < \delta$, $|y| < \delta$ için $\left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| < \varepsilon$

olacak şekilde $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$?

$$\left| \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2y^2}{2|x||y|} = \frac{|x||y|}{2} < \frac{\delta^2}{2} = \varepsilon$$

$\left(\forall x,y \text{ için } (|x|-|y|)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2-2|x||y| \geq 0 \right.$
$\left. x^2+y^2 \geq 2|x||y| \text{ olur.} \right)$

$\Rightarrow \delta = \sqrt{2\varepsilon} > 0$ seçilirse $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$ olur.

3) $M(1,2,3)$ ve $N(5,4,15)$ noktaları veriliyor. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$ fonksiyonunun $\overrightarrow{MN}$ yönündeki türevini hesaplayınız.

$\overrightarrow{MN} = N - M = (4, 2, 12)$ $\quad \|MN\| = \sqrt{16+4+144} = 2\sqrt{41}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{\sqrt{41}} (2, 1, 6)$

$\text{Grad} f = (f_x, f_y, f_z) = (y+z, x+z, y+x)$

$D_f(\overrightarrow{MN}) = \frac{2}{\sqrt{41}} (y+z) + \frac{1}{\sqrt{41}} (x+z) + \frac{6}{\sqrt{41}} (y+x)$

4) $9x^2+9y^2-z^2=0$ konisi ile $y+2z-3=0$ düzleminin arakesit eğrisi üzerinde $O(0,0,0)$ orijin noktasına en yakın olan noktayı bulunuz.

cvp: Arakesit eğrisi üzerindeki nokta (x,y,z) olsun. $O(0,0,0)$ noktasına uzaklığı

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$ olup en yakın nokta

$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ fonksiyonunun en küçük değerine karşılık gelen noktadır. O halde

$$h(x,y,z;\lambda,\gamma)=x^2+y^2+z^2+\lambda(9x^2+9y^2-z^2)+\gamma(y+2z-3)$$

Lagrance çarpanı yöntemiyle yapalım.

$$h_x=2x+18x\lambda=0 \Rightarrow 2x(1+9\lambda)=0$$

$x=0$ ✓ $\lambda=-\frac{1}{9}$

$$h_y=2y+18\lambda y+\gamma=0$$

$$h_z=2z-2z\lambda+2\gamma=0$$

$$\left.\begin{array}{l} h_\lambda=9x^2+9y^2-z^2=0 \\ h_\gamma=y+2z-3=0 \end{array}\right\} \quad x=0 \quad 9y^2-z^2=0$$

$$y+2z-3=0$$

$$y=3-2z$$

$$(3y)^2-z^2=0 \Rightarrow (9-6z)^2-z^2=0$$

$$\Rightarrow (9-6z-z)(9-6z+z)=0 \Rightarrow (9-7z)(9-5z)=0$$

$z=\frac{9}{7}$ $z=\frac{9}{5}$

$x=0$ $z=\frac{9}{7}$ için $y=3-2z=3-\frac{18}{7}=\frac{3}{7}$

$x=0$ $z=\frac{9}{5}$ için $y=3-2z=3-\frac{18}{5}=\frac{3}{5}$

$(0,\frac{3}{7},\frac{9}{7})$ ve $(0,\frac{3}{5},\frac{9}{5})$ noktaları ekstremum noktalardır.

$$d_1 = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{0+\frac{9}{49}+\frac{81}{49}} = \sqrt{\frac{90}{49}} = \frac{3\sqrt{10}}{7}$$

$$d_2 = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{0+\frac{9}{25}+\frac{81}{25}} = \sqrt{\frac{90}{25}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$d_1 < d_2$ olup $\left(0, \frac{3}{7}, \frac{9}{7}\right)$ noktası en yakındır.

5) $f(x,y) = x^2y^2 - 4xy^2 + 5xy + 4$ fonksiyonunu $(1,2)$ noktası komşuluğunda 3. mertebeden terimlerine kadar ~~taylor~~ serisine açınız.

$f(1,2) = 2$

$f_x = 2xy^2 - 4y^2 + 5y \qquad f_x(1,2) = 2$

$f_y = 2x^2y - 8xy + 5x \qquad f_y(1,2) = -7$

$f_{xx} = 2y^2 \quad , \quad f_{yy} = 2x^2 - 8x \qquad f_{xx}(1,2) = 8$

$f_{xy} = 4xy - 8y + 5 \qquad f_{yy}(1,2) = -6$

$f_{xy}(1,2) = -3$

$f_{xxx} = 0 \quad f_{yyy} = 0$

$f_{xxy} = 4y \quad , \quad f_{xyy} = 4x - 8 \qquad f_{xxy}(1,2) = 8$

$f_{xyy}(1,2) = -4$

$$f(x,y) = f(1,2) + \frac{1}{1!}\left(f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2)\right)$$

$$+\frac{1}{2!}\left(f_{xx}(1,2)(x-1)^2 + 2f_{xy}(1,2)(x-1)(y-2) + f_{yy}(1,2)(y-2)^2\right]$$

$$+\frac{1}{3!}\left(f_{xxx}(1,2)(x-1)^3 + 3f_{xxy}(1,2)(x-1)^2(y-1) + 3f_{xyy}(1,2)(x-1)(y-1)^2 + f_{yyy}(1,2)(y-1)^3\right]$$

$$f(x,y) = 2 + [2(x-1) - 7(y-2)] + \frac{1}{2!}\left(8(x-1)^2 - 6(x-1)(y-2) - 6(y-2)^2\right] + \frac{1}{3!}\left[24(x-1)^2(y-1) - 12(x-1)(y-1)^2\right]$$